www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.P.I. Lyon - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1990

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES Série M

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Objectifs du problème

Dans la partie I on définit deux suites de polynomes dont on étudie quelques propriétés. Dans la partie II on utilise ces deux suites de polynomes pour obtenir une approximation rationnelle de la fonction exponentielle.

Conventions adoptées

Toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Tous les polynomes et séries entières seront à coefficients réels.

Question préliminaire :

Soit n un entier naturel, P un polynome de degré au plus n et S une série entière de rayon de convergence infini. Montrer que si S et P vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^n . S(x)$

alors il existe un réel λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}\quad P(x) = \lambda x^n$.

PARTIE I

1°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir l'existence d'une série entière $A_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, que l'on explicitera, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad A_n(x) = \frac{e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)}{x^{n+1}}.$$

b) Expliciter la dérivée n-ième de chacune des fonctions : $x \mapsto x^{-n-1}e^x$, $x \mapsto x^{-n-1+k}$ et A_n.

c) En déduire l'existence d'un couple (P_n, Q_n) de polynomes de degré n, Q_n étant unitaire, et d'une série entière B_n de rayon de convergence infini, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\qquad B_n(x) = \frac{e^x\, Q_n(x) - P_n(x)}{x^{2n+1}}. \qquad (1)$$

Expliciter la série : $B_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ et montrer les relations :

$$P_n(x) = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!}\, x^k \quad , \qquad Q_n(x) = P_n(-x).$$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Etablir l'existence d'une série entière C_n de rayon de convergence infini tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n-1}(x)\, Q_n(x) - P_n(x)\, Q_{n-1}(x) = x^{2n-1}\, C_n(x).$$

b) En déduire la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n-1}(x)\, Q_n(x) - P_n(x)\, Q_{n-1}(x) = 2(-1)^{n+1}\, x^{2n-1}.$$

c) Montrer que P_n et Q_n n'ont pas de diviseur commun.

3°) Dans cette question on étudie les racines de P_n et Q_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) En utilisant la relation (1) du I.1°)c), montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x)\, Q_n(x) + P_n(x)\, Q_n'(x) - P_n'(x)\, Q_n(x) = (-1)^n\, x^{2n}.$$

b) Montrer que P_n et Q_n n'ont pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

c) Vérifier que P_n n'a pas de racine réelle positive ou nulle. Déterminer le nombre et le signe des racines réelles de P_n et Q_n suivant la parité de n. (On pourra étudier et utiliser la fonction définie sur $[0\ +\infty[$ par : $x \mapsto e^x \dfrac{Q_n(x)}{P_n(x)}$).

PARTIE II

La question 1°) est indépendante des autres questions de cette partie.

1°) Le but de cette question est d'obtenir une estimation de l'approximation sur [-1 1] de la fonction exponentielle par la fonction

f_2 définie par : $f_2(x) = \dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$. (Voir I.1°))

a) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $\dfrac{P_2}{Q_2}$.

b) Montrer que : $\forall x \in \left]-\sqrt{12},\ +\sqrt{12}\right[$, $f_2(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{(\sqrt{12})^{n-1}} \cdot \sin \dfrac{n\pi}{6} \right) x^n$.

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

c) En déduire les majorations suivantes :

$$\forall x \in [-1,\ 1], \quad \left|e^x - f_2(x)\right| \leqslant \frac{1}{360} + \sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=7}^{+\infty} \frac{2}{(\sqrt{12})^{n-1}} \leqslant 5.10^{-3}.$$

d) A titre de comparaison, déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in [-1,\ 1], \quad \left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant 5.10^{-3}.$$

2°) Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^1 e^{x(1-t)} \frac{t^n (1-t)^n}{n!} dt$$

est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, les intégrales $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

c) En déduire les coefficients de la série entière $\varphi(x)$, et démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = B_n(x)$.

3°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la suite de fonction y_n par

$$y_n(x) = e^x Q_n(x) - P_n(x).$$

a) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_n(x) = e^x \int_0^x e^{-t} \frac{t^n (x-t)^n}{n!} dt.$$

b) Montrer que la suite de fonctions $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

c) Montrer que cette convergence est uniforme sur tout segment [a,b]. Est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

4°) a) Démontrer que la suite de fonctions $\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$ vers la fonction : $x \mapsto e^{-x}$.

b) Soit [a,b] un segment de $\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, Q_n n'ait pas de racine dans [a,b].

c) Etablir que la suite de fonctions $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ converge uniformément sur [a,b] vers la fonction exponentielle : $x \mapsto e^x$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail